

DOI: 10.7652/xjtuxb201404002

扩展目标联合检测与估计的误差界

连峰, 马冬冬, 韩崇昭

(西安交通大学智能网络与网络安全教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对杂波和漏检环境下单个扩展目标联合检测与估计的性能评价问题,提出了一种基于随机有限集(Random Finite Set,RFS)的误差分析方法。该方法通过将扩展目标的状态和观测分别建模为 Bernoulli RFS 和 Poisson RFS,在 RFS 框架下推导获得了采用最大后验概率检测器和无偏估计器的均方误差界,并给出了其在目标确定存在以及无杂波条件下的简化形式。实验结果表明,建议的均方误差界能够有效地反映扩展目标联合检测与估计算法所能达到的最优性能,利用该误差界可以对不同的扩展目标联合检测与估计算法的性能进行有效的衡量,误差在 5% 以内。推导过程和结论仅关注于单传感器扩展目标联合检测与估计的静态问题,并假设其状态和测量均为标量。

关键词: 性能评价;扩展目标跟踪;联合检测与估计;随机有限集

中图分类号: TP393 **文献标志码:** A **文章编号:** 0253-987X(2014)04-0008-07

Error Bound for Joint Detection and Estimation for Extended Target

LIAN Feng, MA Dongdong, HAN Chongzhao

(Ministry of Education Key Laboratory for Intelligent Networks and Network Security, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: An error analysis strategy with random finite set (RFS) is proposed to address the performance evaluation for joint detection and estimation of an extended target with clutters and missed detections. Modeling the state and observations of the extended target as the Bernoulli RFS and Poisson RFS respectively, a mean square error (MSE) bound restricted to maximum a posterior detector and unbiased estimator is derived. Experiments show that the proposed MSE bound can effectively indicate the performance limits of the extended-target joint detection-estimation algorithms and the error is less than 5%.

Keywords: performance evaluation; extended target tracking; joint detection and estimation; random finite set

在目标跟踪领域中,受非线性、杂波、漏检等因素的影响,绝大多数的滤波算法都是子最优的。为了衡量这些算法的性能,必须获得相应的估计误差下界。在 20 世纪 90 年代,Tichavsky 等提出采用递推后验克拉美罗下界(Posterior Cramér-Rao Lower Bound,PCRLB)^[1]来衡量离散时间非线性滤波问题的均方误差(Mean Square Error,MSE)。随后,PCRLB 又被推广到杂波和漏检存在^[2]以及目标

机动^[3]等情况,但 PCRLB 必须假设目标是确定存在的,即其仅适用于估计问题而非检测问题。当目标存在与否未知时,Rezaeian 等在随机有限集(Random Finite Set,RFS)框架下提出了联合检测与估计的 MSE 界^[4]。目前,关于误差界的研究成果已经在传感器管理^[5]、弹道目标跟踪及性能预测^[6]、无源定位与跟踪^[7]等领域取得了成功的应用。

近年来,随着传感器性能的不断提高,扩展目标

收稿日期: 2013-10-10。 作者简介: 连峰(1981—),男,副教授。 基金项目: 国家重点基础研究发展规划资助项目(2013CB329405);国家自然科学基金优秀创新研究群体资助项目(61221063);国家自然科学基金资助项目(61004087);中国博士后科学基金特别资助项目(2012T50806);中央高校基本科研业务费专项资金资助项目(xj2011033)。

网络出版时间: 2014-01-16 网络出版地址: <http://www.cnki.net/kcms/detail/61.1069.T.20140116.1658.003.html>

跟踪问题成为了一个新的研究热点,已有很多相关的算法应运而生^[8-10]。然而,目前还尚未有扩展目标估计误差界的相关结论。为解决此问题,通过将扩展目标状态和观测分别建模为 Bernoulli RFS 和 Poisson RFS,并假定采用最大后验概率(Maximum A Posterior, MAP)检测器和无偏估计器,本文推导获得了杂波和漏检存在时针对单个扩展目标的联合检测与估计的 MSE 界,并通过两个算例展示了该误差界的应用。

在本文中,目前的推导过程和结论仅关注单传感器扩展目标联合检测与估计的静态问题,并假设其状态和测量均为标量。

1 问题描述

记单个扩展目标状态为 $x \in \mathcal{X}$,其中 $\mathcal{X}$ 表示扩展目标状态空间,扩展目标的状态集合为 X 。假设监控区域内最多只有 1 个扩展目标,因此可将 X 建模为一个 Bernoulli RFS, $\mathcal{X} \sim \mathcal{B}_X(r, f(x))$,其概率密度为

$$\pi(X) = \begin{cases} 1-r, & X = \emptyset \\ rf(x), & X = \{x\} \end{cases} \quad (1)$$

式中: r 为 $X \neq \emptyset$ 的概率; $f(x)$ 为 x 所满足分布的概率密度。

记单个传感器观测为 $z \in \mathcal{Z}$,其中 $\mathcal{Z}$ 表示观测空间,传感器观测集合 Z 记为

$$Z = Z_t(X) \cup Z_c \quad (2)$$

式中: $Z_t(X)$ 为源于扩展目标的观测集; Z_c 为杂波集。假设 Z_c 是一个 Poisson RFS,其密度可表示为

$$c(Z_c) = e^{-\lambda} v^{Z_c} \quad (3)$$

其中

$$v^{Z_c} = \prod_{z \in Z_c} v(z) \quad (4)$$

$$v(z) = \lambda f_c(z) \quad (5)$$

式中: $v(z)$ 为杂波强度; λ 为平均杂波数; $f_c(\cdot)$ 为单个杂波分布的概率密度。

令 $P_o(x)$ 表示传感器至少获得一个由状态为 x 的扩展目标所产生观测的概率,记

$$\bar{P}_o = \int f(x) P_o(x) dx \quad (6)$$

为平均检测概率。

目前,通常采用 Poisson 模型来描述扩展目标的测量似然函数^[9],若状态为 x 的扩展目标产生的测量集合为 Z ,则其似然函数为

$$g(Z|x) = e^{-\alpha(x)} \prod_{z \in Z} \alpha(x) \phi(z|x) \quad (7)$$

式中: $\alpha(x)$ 和 $\phi(\cdot|x)$ 分别表示由该扩展目标所产

生的平均测量数和单个测量分布的概率密度。

2 扩展目标联合检测与估计的 MSE 界

令 $e(X, \hat{X}(Z))$ 表示扩展目标真实状态集合 X 与估计状态集合 $\hat{X}(Z)$ 之间的误差,则扩展目标联合检测和估计算法的 MSE 可定义为

$$\sigma^2 = E[e^2(X, \hat{X}(Z))] =$$

$$\iint \gamma(Z|X) f(X) e^2(X, \hat{X}(Z)) \delta X \delta Z \quad (8)$$

式中: $f(X, Z)$ 表示 X 和 Z 的联合密度; $\gamma(Z|X) = f(Z|X)$ 表示给定扩展目标状态集合 X 时传感器测量集合 Z 的似然函数; $\int \cdot \delta Z$ 表示集合积分,定义为

$$\int f(Z) \delta Z \triangleq f(\emptyset) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} f(Z^n) dz_1 \cdots dz_n \quad (9)$$

其中

$$Z^n = \{z_1, \dots, z_n\} \in \mathcal{Z}^n \quad (10)$$

式中: $n = |Z|$, $|\cdot|$ 为集合的势。记 $Z^0 = \emptyset$ 。

由于 X 和 $\hat{X}(Z)$ 的势只能为 1 或 0,故 $e(X, \hat{X}(Z))$ 只有 4 种可能性。因此,可令

$$\left. \begin{aligned} e(X = \emptyset, \hat{X}(Z) = \emptyset) &= 0 \\ e(X = \{x\}, \hat{X}(Z) = \{\hat{x}\}) &= |x - \hat{x}| \\ e(X = \emptyset, \hat{X}(Z) = \{\hat{x}\}) &= e_0 \\ e(X = \{x\}, \hat{X}(Z) = \emptyset) &= e_1 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

式中: e_0 为虚警误差; e_1 为漏检误差。

为了便于推导扩展目标联合检测和估计的 MSE 界,需要定义如下两个概率密度

$$f_d(x) = f(x) P_o(x) / \bar{P}_o \quad (12)$$

$$f_{d'}(x) = f(x) (1 - P_o(x)) / (1 - \bar{P}_o) \quad (13)$$

$f_d(x)$ 为已知传感器获得至少一个扩展目标观测时状态 x 的概率密度; $f_{d'}(x)$ 为已知传感器没有获得扩展目标观测时状态 x 的概率密度。

记 x^* 和 σ_c^2 分别表示密度 $f_{d'}(\cdot)$ 的均值和方差

$$x^* = \int x f_{d'}(x) dx \quad (14)$$

$$\sigma_c^2 = \int f_{d'}(x) (x - x^*)^2 dx \quad (15)$$

引理 1 若扩展目标状态集合满足式(1)的 Bernoulli 模型,杂波分布和扩展目标测量似然函数分别满足式(3)和式(7)的 Poisson 模型,那么传感器测量似然函数 $\gamma(Z|X)$ 具有如下形式

$$\gamma(Z|X) = \begin{cases} e^{-\lambda} v^Z, & X = \emptyset \\ (1 - P_o(x)) e^{-\lambda} v^Z + P_o(x) e^{-\lambda} \sum_{Y \subseteq Z} g(Y|x) v^{Z-Y}, & X = \{x\} \end{cases} \quad (16)$$

证明见附录 A。

引理 2 若扩展目标状态集合满足式(1)的 Bernoulli 模型,杂波分布和扩展目标测量似然函数分别满足式(3)和式(7)的 Poisson 模型,那么,对于 $Z \neq \emptyset$,当且仅当 $Z \in \mathcal{Z}_0 = \mathcal{Z} - \mathcal{Z}'_0$ 时,MAP 检测器判定 $\hat{X} = \emptyset$,其中

$$\mathcal{Z}'_0 = \left\{ Z \in \mathcal{Z}: \beta(Z) \geq 1 + \frac{1-2r}{rP_o} \right\} \quad (17)$$

$$\beta(Z) = \int f_d(x) \sum_{Y \subseteq Z} \frac{g(Y|x)}{v^Y} dx \quad (18)$$

证明见附录 B。

在引理 2 中, $\mathcal{Z}_0$ 表示根据 MAP 准则判定扩展目标不存在时所对应的测量空间, $\mathcal{Z}'_0$ 表示根据 MAP 准则判定扩展目标存在时所对应的测量空间。

为了证明定理 1,需要利用信息不等式^[4],若 $\mathcal{X}^2$ 上的联合概率密度 $f(\cdot, \cdot)$ 满足正则条件且 $\partial^2 \log f(x, z) / \partial x^2$ 存在,那么如下不等式成立

$$\sigma_i^2 = \int_{\mathcal{X}^2} f(x, z) (x - \hat{x}(z))^2 dx dz \geq J^{-1} \quad (19)$$

式中: $\hat{x}(z)$ 为由观测 z 获得的 x 的无偏估计; σ_i^2 为 $\hat{x}(z)$ 的均方误差; J 为 Fisher 信息

$$J = -E_{\mathbf{f}} \left[\frac{\partial^2 \log f(x, z)}{\partial x^2} \right] = - \int_{\mathcal{X}^2} f(x, z) \frac{\partial^2 \log f(x, z)}{\partial x^2} dx dz \quad (20)$$

定理 1 若扩展目标状态集合满足式(1)的 Bernoulli 模型,杂波分布和扩展目标测量似然函数分别满足式(3)和式(7)的 Poisson 模型,那么,该扩展目标联合 MAP 检测与无偏估计的 MSE 界为

$$\begin{aligned} \sigma^2 &\geq (1-r)(1-\mu_2)e_0^2 + \\ &r(1-\bar{P}_o)(\sigma_e^2 - \mu_2(\sigma_e^2 - e_1^2)) + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} (J'^{-1}_n + e_1^2(1-\omega_n)) \end{aligned} \quad (21)$$

其中

$$\mu_2 = \begin{cases} e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda}, & r \geq r^* \\ e^{-\lambda_0}, & r < r^* \end{cases} \quad (22)$$

$$\lambda_0 = \int_{\mathcal{X}^1_0} v(z) dz \quad (23)$$

$$r^* = \frac{e_0^2}{e_0^2 + (1-\bar{P}_o)(e_1^2 - \sigma_e^2)} \quad (24)$$

$$J'_n = \begin{cases} -\frac{1}{\omega_n^2} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}^n_0} p_n(x, Z^n) \cdot \\ \frac{\partial^2 \log p_n(x, Z^n)}{\partial x^2} dz_1 \cdots dz_n dx, & \mathcal{X}'_0 \neq \emptyset \\ \infty, & \mathcal{X}'_0 = \emptyset \end{cases} \quad (25)$$

$$\omega_n = \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{X}^n_0} p_n(x, Z^n) dz_1 \cdots dz_n dx \quad (26)$$

$$p_n(x, Z^n) = \frac{1}{\Omega_n} f_d(x) \sum_{Y \subseteq Z^n} g(Y|x) v^{Z^n-Y} \quad (27)$$

$$\Omega_n = \int_{\mathcal{X}} f_d(x) e^{-\alpha(x)} (\lambda + \alpha(x))^n dx \quad (28)$$

证明见附录 C。

3 算例及分析

3.1 算例 1 分析

已知扩展目标状态集合 X 满足 Bernoulli 分布 $\mathcal{B}_X(r, f(x))$, 且

$$f(x) = \mathcal{N}(x; x_0, \sigma_x^2) \quad (29)$$

式中: $\mathcal{N}(\cdot)$ 为高斯分布的概率密度函数; x_0 和 σ_x^2 分别为其均值和方差。

令单个测量分布 $\phi(z|x)$ 满足

$$\phi(z|x) = \mathcal{N}(z; h(x), \sigma_z^2) \quad (30)$$

式中: $h(\cdot)$ 表示观测函数,本例中令 $h(x) = bx$; σ_z^2 为测量噪声方差。

假设传感器检测概率以及由扩展目标所产生的平均测量数均与状态无关,即 $P_o(x) = P_o, \alpha(x) = \alpha$ 。

假设 Poisson 杂波强度 $v(z) = \lambda \mathcal{U}(z)$, 其中 $\mathcal{U}(\cdot)$ 表示均匀分布的概率密度函数。

对于上述扩展目标跟踪系统,有

$$\mathcal{Z}'_0 = \left\{ Z \in \mathcal{Z}: \beta(Z) \geq 1 + \frac{1-2r}{rP_o} \right\} \quad (31)$$

$$\beta(Z) = e^{-\alpha} \int \mathcal{N}(x; x_0, \sigma_x^2) \Gamma(x, Z) dx \quad (32)$$

$$p_n(x, Z^n) = \frac{\mathcal{N}(x; x_0, \sigma_x^2) v^{Z^n}}{(\lambda + \alpha)^n} \Gamma(x, Z^n) \quad (33)$$

$$\Omega_n = e^{-\alpha} (\lambda + \alpha)^n \quad (34)$$

$$\sigma_e^2 = \sigma_x^2 \quad (35)$$

$$r^* = \frac{e_0^2}{e_0^2 + (1-\bar{P}_o)(e_1^2 - \sigma_x^2)} \quad (36)$$

$$\lambda_0 = \lambda \int_{\mathcal{X}^1_0} \mathcal{U}(z) dz \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log p_n(x, Z^n)}{\partial x^2} &= \frac{-1}{\sigma} - \frac{b \sum_{Y \subseteq Z^n} \mu(x, Y) \eta(x, Y)}{\sigma_z^2 \Gamma^2(x, Z^n)} + \\ &\frac{b^2 \sum_{Y \subseteq Z^n} \mu(x, Y) (\eta^2(x, Y) - |Y| \sigma_z^2)}{\sigma_z^4 \Gamma(x, Z^n)} \end{aligned} \quad (38)$$

其中

$$\Gamma(x, Z) = \sum_{Y \subseteq Z} \mu(x, Y) \quad (39)$$

$$\mu(x, Y) = \prod_{z \in Y} \frac{\alpha \mathcal{N}(z; bx, \sigma_z^2)}{\lambda \mathcal{U}(z)} \quad (40)$$

$$\eta(x, Y) = \sum_{z \in Y} (z - bx) \quad (41)$$

将式(31)~式(41)代入定理1中的式(26)、式(25)和式(21),即可获得 ω_n 、 J'_n 以及 σ^2 的MSE界的计算公式,但由于其包含积分运算,且没有解析的表达形式,因此需要采用数值积分法进行计算。

在本例中,假定 $x_0=0$, $\sigma_x^2=100$, $b=1$, $\sigma_z^2=25$, $\alpha=4$, $e_0^2=150$, $e_1^2=200$ 。令监控区域的范围为 $[-50,50]$,即 $\mathcal{U}(z)=1/100$ 。

图1和图2分别通过两组实验展示了扩展目标存活概率 r 、传感器检测概率 P_o 和杂波强度 $\lambda/100$ 对所建议的扩展目标联合检测与估计的MSE界的影响。

给定 $\lambda=10$,图1给出了在不同 P_o 下扩展目标联合检测与估计的MSE界随 r 的变化曲线。

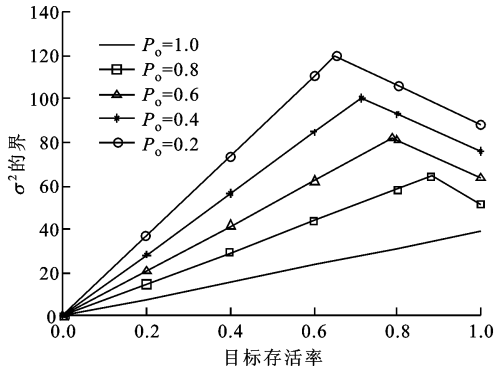


图1 $\lambda=10$ 时不同 P_o 下扩展目标联合检测与估计的MSE界随 r 的变化曲线

由图1可以看出,当 λ 和 P_o 一定时,建议的MSE界是随 r 变化的线性折线,拐点在 r^* 处。当 $r < r^*$ 时,该界随 r 的增大而线性增大,当 $r \geq r^*$ 时,该界随 r 的增大而线性减小。这是由于当 $r < r^*$ 时,建议的MSE界由低概率准则(见附录中定理1的证明)获得,此时当 $Z=\emptyset$ 时判定 $\hat{X}=\emptyset$,故可能造成扩展目标的漏检。若 r 增大,漏检的可能性也随之增加,导致漏检误差 e_1 对该界的影响加重,故该界随 r 的增大而增大;反之,若 $r \geq r^*$,建议的MSE界由高概率准则(见附录中定理1的证明)获得,此时当 $Z=\emptyset$ 时判定 $\hat{X}=\{\hat{x}(\emptyset)\}$,故可能造成扩展目标的虚警。若 r 增大,虚警和漏检的可能性均随之降低,导致漏检误差 e_1 和虚警误差 e_0 对该界的影响均减弱,故该界随 r 的增大而减小。

当 λ 和 r 一定时,建议的MSE界随 P_o 的减小而增大,这是由于当杂波强度较低时,例如在本场景中 $\lambda=10$,相比由杂波引起的虚警,由 P_o 引起的漏检在建议的误差界中占主导作用,此时 P_o 越低,漏检的可能性越大,导致漏检误差 e_1 对该界的影响加

重,故该界随 P_o 的减小而增大。

给定 $r=0.6$,图2给出了在不同 P_o 下扩展目标联合检测与估计的MSE界随 λ 的变化曲线。

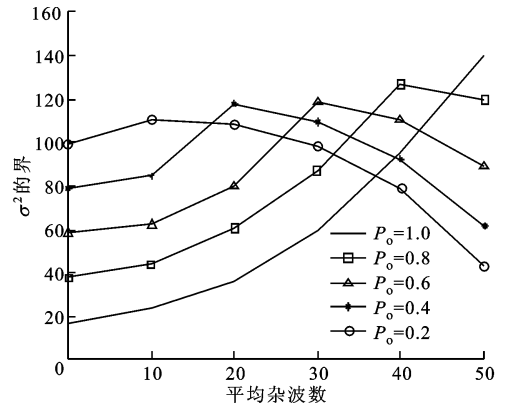


图2 $r=0.6$ 时不同 P_o 下扩展目标联合检测与估计的MSE界随 λ 的变化曲线

由图2可以看出,当 r 和 P_o 一定时,建议的MSE界是随 λ 变化的非线性曲线,并且只有 $P_o=1$ 时该界是关于 λ 单调增的。对于 $P_o < 1$ 时,该界随 λ 的增大而呈现先增大后减小的特性,不妨记 $\lambda=\lambda^*$ 时对应于曲线的峰值。由图还可以看出,若 P_o 越小,其所对应的 λ^* 也越小。这是由于对于较低的 P_o ,例如 $P_o=0.2$,漏检的可能性较大,而当 λ 增大到一定程度时,不妨记为 $\lambda > \lambda^*$ 时, λ 的增大反而可能有助于降低扩展目标的漏检概率,从而减少漏检误差 e_1 对建议的MSE界的影响,使得当 $\lambda > \lambda^*$ 时该界随 λ 增大而减小。

当 r 和 λ 一定时,建议的MSE界并不总是随 P_o 的增大而减小。对于较低的 λ ,例如 $\lambda < 15$,该界随 P_o 的增大而减小,但随着 λ 的增大,较大 P_o 所对应的MSE界逐渐超越较小 P_o 所对应的MSE界,直到 λ 增大到一定程度时,例如 $\lambda > 46$,建议的MSE界最终随 P_o 的增大而增大。这是由于当杂波强度较小时,例如 $\lambda < 15$,相比由杂波引起的虚警,由传感器检测概率引起的漏检占主导作用,此时 P_o 越大漏检的可能性越小,漏检误差 e_1 对该界的影响越弱,该界随 P_o 的增大而减小。但是,随着杂波强度的增大,由杂波引起的虚警在建议的误差界中逐渐占主导作用,此时 P_o 越大反而会增加虚警的可能性,加重虚警误差 e_0 对该界的影响,最终导致当 $\lambda > 46$ 时,该界随 P_o 的增大而增大。

3.2 算例2分析

保持例1的参数和场景不变,在本例中我们将所建议的MSE界与扩展目标概率假设密度(Ex-

tended-Target Probability Hypothesis Density, EPHD)滤波器^[9]、扩展目标势 PHD(Extended-Target Cardinalized PHD,ECPHD)滤波器^[10]两种现有的扩展目标联合检测与估计算法相比较。由于目前所建议的误差界仅关注扩展目标联合检测与估计的静态问题,因此在上述两种算法中,令扩展目标状态的时间演化模型为

$$x_k = x_{k-1} \tag{42}$$

通过该运动模型即可将动态问题转化为静态问题。令 $P_0=0.9,r=0.6$,表 1 给出了当 $\lambda=5,10,15,20,25$ 时本文所建议的 MSE 界与上述两种扩展目标联合检测与估计算法的稳态 MSE(该 MSE 通过 500 次蒙特卡洛仿真实验平均后获得)的比较结果。

表 1 给定 $P_0=0.9,r=0.6$ 时两种算法的平均稳态 MSE 与所建议的 MSE 界随 λ 的变化

MSE	$\lambda=5$	$\lambda=10$	$\lambda=15$	$\lambda=20$	$\lambda=25$
EPHD 的平均稳态 MSE	31.5	36.2	43.5	54.2	68.1
ECPHD 的平均稳态 MSE	29.9	34.1	41.0	50.8	63.7
建议的 MSE 界	28.8	32.6	39.1	48.7	61.2

定义 MSE 界的相对误差为
$$\frac{\text{两种算法中最小的 MSE}-\text{建议的 MSE 界}}{\text{建议的 MSE 界}} \times 100\%$$

由上式可得 $\lambda=5,10,15,20,25$ 时其 MSE 界的相对误差分别为 3.8%、4.6%、4.9%、4.3%、4.1%。

由表 1 可以看出,当 λ 由 5 变化到 25 时,ECPHD 的性能始终保持最优,其平均稳态 MSE 最接近于本文所建议的 MSE 界,并且随着 λ 的增加,ECPHD 相比 EPHD 的性能优势越明显。这是由于 EPHD 当杂波较密集时其扩展目标个数估计的波动通常较大,导致其相应的联合检测与估计误差高于本文所建议的 MSE 界。两种算法的最小平均稳态 MSE 接近于本文所建议的 MSE 界,且误差均在 5%以内,说明本文所建议的扩展目标联合检测与估计的 MSE 界是较紧的。两种算法之所以没有完全达到本文所建议的 MSE 界,是由于它们都有不同程度的近似。例如,EPHD 假设目标状态的演化为一个泊松过程,ECPHD 假设目标状态的演化为一个聚类过程,但后者相比前者由于近似而产生的误差要小,尤其当杂波或目标越密集时,ECPHD 的性能优势越明显。

综上所述,本文建议的 MSE 界能够正确反映

扩展目标联合检测与估计算法所能达到的最优性能,利用该误差界可以对不同的扩展目标联合检测与估计算法的性能进行有效的衡量。

4 结 论

本文在 RFS 框架下推导获得了针对单个扩展目标的联合检测与估计的 MSE 界,并给出了其在目标确定存在以及无杂波条件下的简化形式。两个算例给出了该误差界的应用。今后的工作主要集中在结合扩展目标的运动模型进一步研究本文误差界的矢量递推形式,并将本文结论推广到多个扩展目标以及多传感器的情况。

参考文献:

[1] TICHAVSKY P, MURAVCHIK C, NEHORAI A. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete time nonlinear filtering [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 1998, 46(5): 1701-1722.

[2] HERNANDEZ M, FARINA A, RISTIC B. PCRLB for tracking in cluttered environments: measurement sequence conditioning approach [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2006, 42(2): 680-704.

[3] HERNANDEZ M, BENAVALI A, GRAZIANO A, et al. Performance measures and MHT for tracking move-stop-move targets with MTI sensors [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2011, 47(2): 996-1025.

[4] REZAEIAN M, VO B N. Error bounds for joint detection and estimation of a single object with random finite set observation [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2010, 58(3): 1493-1506.

[5] THARMARASA R, KIRUBARAJAN T, HERNANDEZ M, et al. PCRLB-based multisensor array management for multitarget tracking [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2007, 43(2): 539-555.

[6] 巫春玲, 韩崇昭. 用于弹道目标跟踪的有限差分扩展卡尔曼滤波算法 [J]. 西安交通大学学报, 2008, 42(2): 143-146.

WU Chunling, HAN Chongzhao. Finite-difference extended Kalman filtering algorithm for ballistic target tracking [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2008, 42(2): 143-146.

[7] 刘学, 焦淑红. 拟蒙特卡罗自适应粒子滤波的机载无源定位算法 [J]. 西安交通大学学报, 2011, 45(9): 34-39.

LIU Xue, JIAO Shuhong. Quasi Monte-Carlo adaptive particle filter for airborne passive location [J]. Journal of Xi'an Jiaotong University, 2011, 45(9): 34-39.

- [8] KOCH W. Bayesian approach to extended object and cluster tracking using random matrices [J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2008, 44(3): 1042-1059.
- [9] MAHLER R. PHD filters for nonstandard targets: I Extended targets [C]//Proceedings of the 12th International Conference on Information Fusion. Piscataway, NJ, USA: IEEE, 2009: 915-921.
- [10] LIAN Feng, HAN Chongzhao, LIU Weifeng, et al. Unified cardinalized probability hypothesis density filters for extended targets and unresolved targets [J]. Signal Processing, 2012, 92(7): 1729-1744.

附录 A

引理 1 的证明如下。

既然扩展目标状态 X 满足如式(1)所示的 Bernoulli 模型,那么 X 只能为 $\emptyset$ 或 $\{x\}$ 。

若 $X = \emptyset$,说明所有测量均源于杂波,根据式(3)可得

$$\gamma(Z | X = \emptyset) = e^{-\lambda v^Z} \quad (A1)$$

若 $X = \{x\}$,则

$$\gamma(Z | X = \{x\}) =$$

$$P(Z | X = \{x\}, \text{所有测量均为杂波}) \cdot$$

$$P(\text{所有测量均为杂波}) +$$

$$P(Z | X = \{x\}, \text{一个测量集源于扩展目标}) \cdot$$

$$P(\text{一个测量集源于扩展目标}) =$$

$$(1 - P_o(x))e^{-\lambda v^Z} + \frac{P_o(x)}{K(x)} \sum_{Y \subseteq Z} g(Y | x) v^{Z-Y} \quad (A2)$$

式中: $K(x)$ 为归一化因子

$$K(x) = \int \sum_{Y \subseteq Z} g(Y | x) v^{Z-Y} \delta Z \quad (A3)$$

根据集合积分的定义,式(A3)可写为

$$K(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} \sum_{Y \subseteq \mathcal{Z}^n} g(Y | x) v^{Z^n-Y} dz_1 \cdots dz_n \quad (A4)$$

将式(7)所示的 $g(Y|x)$ 和式(5)所示的 $v(z)$ 代入式(A4),并对测量 $z_1, \dots, z_n$ 积分可得

$$K(x) = e^{-\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|Y|=0}^n C_n^{|Y|} \frac{\lambda^{n-|Y|}}{n!} (\alpha(x))^{|Y|} = e^{-\alpha(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\lambda + \alpha(x))^n = e^{\lambda} \quad (A5)$$

式中: C_n^k 表示从 n 个元素中选择 k 个元素的组合数

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (A6)$$

将 $K(x) = e^{\lambda}$ 代入式(A2)可得

$$\gamma(Z | X = \{x\}) = (1 - P_o(x))e^{-\lambda v^Z} + P_o(x)e^{-\lambda} \sum_{Y \subseteq Z} g(Y | x) v^{Z-Y} \quad (A7)$$

根据式(A1)和式(A7)可得式(16)。引理 1 证毕。

附录 B

引理 2 的证明如下。

若传感器获得一个非空集合 Z ,那么根据全概率公式可得

$$P(X \neq \emptyset | Z) = \frac{P(X \neq \emptyset)P(Z | X \neq \emptyset)}{P(Z)} = \frac{rP(Z | X \neq \emptyset)}{P(Z)} \quad (B1)$$

式中: $P(Z | X \neq \emptyset)$ 表示扩展目标存在时测量集合为 Z 的概率

$$P(Z | X \neq \emptyset) = \int f(x) \gamma(Z | x) dx \quad (B2)$$

将式(16)代入式(B2),并根据式(6)和式(12)可得

$$P(Z | X \neq \emptyset) = (1 - \bar{P}_o) e^{-\lambda v^Z} + \bar{P}_o \beta(Z) e^{-\lambda v^Z} \quad (B3)$$

其中, $\beta(Z)$ 如式(18)所示。

同理,可得扩展目标不存在时的后验概率为

$$P(X = \emptyset | Z) = \frac{P(X = \emptyset) \gamma(Z | X = \emptyset)}{P(Z)} = \frac{(1-r) e^{-\lambda v^Z}}{P(Z)} \quad (B4)$$

对于 MAP 检测器,若满足

$$P(X = \emptyset | Z) > P(X \neq \emptyset | Z) \quad (B5)$$

则判定 $\hat{X} = \emptyset$ 。将式(B1)和式(B4)代入式(B5),可得

$$\beta(Z) < 1 + \frac{1-2r}{r\bar{P}_o} \Leftrightarrow Z \in \mathcal{Z}_0 \quad (B6)$$

根据上述结论最终可得引理 2。引理 2 证毕。

附录 C

定理 1 的证明如下。

将式(1)、式(6)、式(7)和式(16)代入式(8),可得

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= (1-r) e^{-\lambda} \int v^Z e^2(\emptyset, \hat{X}(Z)) \delta Z + \\ &r(1-\bar{P}_o) e^{-\lambda} \iint v^Z f_d(x) e^2(x, \hat{X}(Z)) dx \delta Z + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \iint \sum_{Y \subseteq Z} g(Y | x) v^{Z-Y} f_d(x) e^2(x, \hat{X}(Z)) dx \delta Z \end{aligned} \quad (C1)$$

下面分两种情况对式(C1)进行讨论。

(1) 定义高概率估计准则为

$$Z = \emptyset \Rightarrow \hat{X} = \{\hat{x}(\emptyset)\} \quad (C2)$$

故式(C1)可简化为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{HPE}}^2 &= (1-r)e^{-\lambda}e_0^2 + (1-r)e^{-\lambda} \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} \nu^{Z^n} e^2(\emptyset, \hat{X}(Z^n)) dz_1 \cdots dz_n + r(1 - \\ &\bar{P}_o) e^{-\lambda} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(\emptyset))^2 dx + r(1 - \bar{P}_o) \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} \nu^{Z^n} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) e^2(x, \hat{X}(Z^n)) dz_1 \cdots dz_n dx + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Z}^n} p_n(x, Z^n) e^2(x, \hat{X}(Z^n)) \cdot \\ &dz_1 \cdots dz_n dx \end{aligned} \quad (C3)$$

根据引理2将积分区域 $\mathcal{Z}^n$ 划分为 $\mathcal{Z}_0^n$ 和 $\mathcal{Z}'_0^n$,并定义 λ_0 如式(23)所示。注意到

$$\left. \begin{aligned} e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}'_0^n} \nu^{Z^n} dz_1 \cdots dz_n &= e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda} \\ e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}_0^n} \nu^{Z^n} dz_1 \cdots dz_n &= 1 - e^{-\lambda_0} \end{aligned} \right\} \quad (C4)$$

根据引理2,可得对于MAP检测器,存在

$$\left. \begin{aligned} Z^n \in \mathcal{Z}'_0^n &\Rightarrow e^2(x, \hat{X}(Z^n)) = \\ &(x - \hat{x}(Z^n))^2, e^2(\emptyset, \hat{X}(Z^n)) = e_0^2 \\ Z^n \in \mathcal{Z}_0^n &\Rightarrow e^2(x, \hat{X}(Z^n)) = \\ &e_1^2, e^2(\emptyset, \hat{X}(Z^n)) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (C5)$$

因此,式(C3)又可写为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{HPE}}^2 &= (1-r)e^{-\lambda}e_0^2 + (1-r)(1-e^{-\lambda_0})e_0^2 + \\ &r(1-\bar{P}_o)e^{-\lambda} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(\emptyset))^2 dx + r(1-\bar{P}_o) \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{n!} \int_{\mathcal{Z}'_0^n} \nu^{Z^n} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(Z^n))^2 dx dz_1 \cdots dz_n + \\ &r(1-\bar{P}_o)e_1^2(e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda}) + r\bar{P}_o e^{-\lambda} \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Z}'_0^n} p_n(x, Z^n) (x - \hat{x}(Z^n))^2 dz_1 \cdots dz_n dx + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} e_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Z}_0^n} p_n(x, Z^n) dz_1 \cdots dz_n dx \end{aligned} \quad (C6)$$

式中: $p_n(x, Z^n)$ 表示关于 (x, Z^n) 的密度函数,其如式(27)所示; Ω_n 为归一化因子

$$\Omega_n = \int_{\mathcal{X}} f_d(x) \int_{\mathcal{Z}^n} \sum_{Y \subseteq \mathcal{Z}^n} g(Y|x) \nu^{Z^n-Y} dz_1 \cdots dz_n dx \quad (C7)$$

将式(7)所示的 $g(Y|x)$ 和式(5)所示的 $\nu(z)$ 代入式(C7)后,并对测量 $z_1, \dots, z_n$ 积分可得

$$\Omega_n = \int_{\mathcal{X}} f_d(x) e^{-a(x)} \sum_{|Y|=0}^n C_n^{|Y|} \lambda^{n-|Y|} (a(x))^{|Y|} dx =$$

$$\int_{\mathcal{X}} f_d(x) e^{-a(x)} (\lambda + a(x))^n dx \quad (C8)$$

既然 σ_e^2 表示密度 $f_{d'}(x)$ 的方差,那么有

$$\left. \begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(Z^n))^2 dx &\geq \sigma_e^2 \\ \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(\emptyset))^2 dx &\geq \sigma_e^2 \end{aligned} \right\} \quad (C9)$$

对密度 $p_n(x, Z^n)$ 应用信息不等式可得

$$\int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Z}'_0^n} p_n(x, Z^n) (x - \hat{x}(Z^n))^2 dz_1 \cdots dz_n dx \geq J_n'^{-1} \quad (C10)$$

式中: J_n' 和 ω_n 分别如式(25)和式(26)所示。

根据式(C9)、式(C10)以及式(26)、式(C6),最终可得

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{HPE}}^2 &\geq (1-r)(1-e^{-\lambda_0} + e^{-\lambda})e_0^2 + \\ &r(1-\bar{P}_o)(\sigma_e^2 - (e^{-\lambda_0} - e^{-\lambda})(\sigma_e^2 - e_1^2)) + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} (J_n'^{-1} + e_1^2(1-\omega_n)) \end{aligned} \quad (C11)$$

(2) 定义低概率估计准则为

$$Z = \emptyset \Rightarrow \hat{X} = \emptyset \quad (C12)$$

故式(C1)可简化为

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LPE}}^2 &= (1-r)e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} \nu^{Z^n} e^2(\emptyset, \hat{X}(Z^n)) \cdot \\ &dz_1 \cdots dz_n + r(1-\bar{P}_o)e^{-\lambda}e_1^2 + r(1-\bar{P}_o) \cdot \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}}{n!} \int_{\mathcal{Z}^n} \nu^{Z^n} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) e^2(x, \hat{X}(Z^n)) dz_1 \cdots dz_n dx + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} \int_{\mathcal{X}} \int_{\mathcal{Z}^n} p_n(x, Z^n) e^2(x, \hat{X}(Z^n)) \cdot \\ &dz_1 \cdots dz_n dx \end{aligned} \quad (C13)$$

注意到式(C13)相比式(C3)减少了 $(1-r)e^{-\lambda}e_0^2$ 和 $r(1-\bar{P}_o)e^{-\lambda} \int_{\mathcal{X}} f_{d'}(x) (x - \hat{x}(\emptyset))^2 dx$ 项,增加了 $r(1-\bar{P}_o)e^{-\lambda}e_1^2$ 项,其余项均不变。因此,根据式(C11)、式(C13),最终可得

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{LPE}}^2 &\geq (1-r)(1-e^{-\lambda_0})e_0^2 + \\ &r(1-\bar{P}_o)((e_1^2 - \sigma_e^2)e^{-\lambda_0} + \sigma_e^2) + \\ &r\bar{P}_o e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Omega_n}{n!} (J_n'^{-1} + e_1^2(1-\omega_n)) \end{aligned} \quad (C14)$$

MSE界应取 σ_{HPE}^2 与 σ_{LPE}^2 的下界中的小者,故当式(C11)的等号右端小于式(C14)的等号右端时,也即

$$r > r^* = \frac{e_0^2}{(1-\bar{P}_o)(e_1^2 - \sigma_e^2) + e_0^2} \quad (C15)$$

取 σ_{HPE}^2 的下界,否则取 σ_{LPE}^2 的下界。根据上述结论最终可得定理1。定理1证毕。

(编辑 武红江)